Quelques méthodes classiques de résolution d'équations aux dérivées partielles

BERGEAULT LECOQ

Vendredi 14 avril 2023

Problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, u est une inconnue appartenant à un espace que l'on allons déterminer.
On cherche à résoudre le problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

et ses variations : par exemple si $q \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ on veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Sommaire

I - Motivations

II - Espaces de Sobolev
1) Définition générale
2) Structure des Sobolev
3) Inégalité de Poincaré
4) Théorème de Rellich

Résolution d'équations aux dérivées partielles
1) Reformulation du problème
2) Théorèmes de représentation
3) Résolutions de problèmes linéaires
4) Problème non linéaire

Avant de résoudre...

Rappel : (1) $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Il s'agit d'abord de donner un sens au système.
Sans essayer de résoudre, deux problèmes apparaissent déjà :

- $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, donc u dépend d'une fonction $\mathbf{L}^2$, donc u n'admet pas nécéssairement de Laplacien
- Comment définir la valeur d'une fonction au bord d'un ouvert ?

Il s'agit d'abord de poser l'espace qui permettrait d'écrire (1) rigoureusement avant d'essayer de trouver des solutions.

Contents

Résultats préliminaires

Dans la suite, on considère toujours $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert de classe $\mathcal{C}^1$.
On écrira parfois, sans ambiguïté, $\mathbf{L}^2$ au lieu de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
On pose $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Densité

$$\mathcal{D} \text{ est dense dans } \mathbf{L}^2$$

Fonction test

Pour tout $p \in [1, \infty]$ si $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ telle que $\int_\Omega f\phi = 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $f = 0$ presque partout.

Remarque : Les fonctions de $\mathcal{D}$ et leurs dérivées sont nulles sur $\partial\Omega$

Dérivée dans $\mathbf{L}^2$

Dérivée faible

On dit que f admet une i-dérivée partielle faible dans $\mathbf{L}^2$ ssi Pour $i \in [\![1, d]\!], \exists v_i \in L^2(\Omega)$ tel que

$$-\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega v_i \phi$$

et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i} := v_i$ ou $\partial_i f := v_i$.

Gradient faible

Soit $f \in \mathbf{L}^2$ qui admet une dérivée partielle faible selon toutes les directions. On définit le gradient faible de f:

$$\nabla f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_d f \end{pmatrix}$$

Dérivée dans $\mathbf{L}^2$

Unicité de la dérivée faible

La dérivée faible de f selon une direction dans $\mathbf{L}^2$, quand elle existe, est unique.

Démonstration

Soit $f \in L^2(\Omega)$ v_i et w_i des derivées partielles faibles de f par rapport a la variable x_i, alors

$$\int_\Omega v_i \phi = \int_\Omega w_i \phi \text{ alors } \int_\Omega (v_i - w_i)\phi = 0 \text{ , } \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ (*)}$$

d'après le résultat sur les fonctions test $v_i = w_i$ p.p donc $v_i = w_i$ dans $\mathbf{L}^2$

Comme les dérivées partielles d'une fonction $\mathcal{C}^1$ vérifie (*), les dérivées faibles et fortes coïncident.

Espace de Sobolev

On pose

$$H^m(\Omega) := \{u \in \mathbf{L}^2 / \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| < m, \partial^\alpha u \in \mathbf{L}^2\}$$

C'est l'espace de Sobolev sur $\mathbf{L}^2$.
On donc travaillera dans la suite avec

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) / \forall i, \partial_i u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Contents

Caractère Hilbertien

$H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire suivant :

$$\forall (f,g) \in (H^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot g + \nabla f \cdot \nabla g$$

où $. \cdot .$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^d$.

Complétude

$H^1(\Omega)$ muni du produits scalaire $\langle ., . \rangle_{H^1(\Omega)}$ est complet.

Éléments de démonstration

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy $H^1(\Omega)$.

- On montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall i \in [\![1,d]\!]$, $(\frac{\partial f_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
- On note f et v_i leurs limites respectives.
- On montre ensuite que que $\forall i \in [\![1,d]\!], \partial_i f = v_i \in \mathbf{L}^2$.
- Et enfin que $\| f_n - f \|^2_{H^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Gestion des conditions au bord

$H_0^1(\Omega)$:

On définit $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ qui est un fermé inclu dans $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est donc un Hilbert.
$H_0^1(\Omega)$ correspond aux fonctions $u \in H^1(\Omega)$ telles que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Si pour $f \in \mathbf{L}^2$ on trouve une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$, on a répondu au problème initial.

Contents

Énoncé

Inégalité de Poincaré

Soit $f \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\| f \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

Corollaire : équivalence de normes

On pose :

$$\forall (f,g) \in H_0^1(\Omega)^2, \langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$$

Alors sur $H_0^1(\Omega)$ la norme issue de $\langle ., . \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ est équivalente a celle issue de $\langle ., . \rangle_{H^1(\Omega)}$

Éléments de démonstration

Poincaré : on prend $u \in \mathcal{D}$ et on concluera par densité.
On écrit $|u(x)|^2$ comme l'intégrale de sa dérivée partielle par rapport à l'une de ses variables.
Ω étant borné, on peut majorer cette intégrale par l'intégrale sur un pavé contenant Ω (tout est fini car $u \in H_0^1$).
On a $\|u\|_{\mathbf{L}^2} = \int_\Omega |u(x)|^2$.
Par la majoration obtenue précédemment, Fubini puis Cauchy-Schwarz ($p = 2$) on a le résultat.
Équivalence des normes :
Application directe de Poincaré

Contents

Opérateur compact :

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que T est un opérateur compact de E dans F si $T\left(\overline{\mathcal{B}}_E\right)$ est relativement compact dans F, c'est-à-dire que T envoie tout borné de E sur un relativement compact de F.

Théorème de Rellich

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

- Le théorème de Rellich permet de démontrer l'inégalité de Poincaré sans calcul.

Contents

Formulation faible

Formule de Green

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. Alors :

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \psi = -\int_\Omega \varphi \cdot \nabla\psi$$

(1) $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

On reformule (1), en intégrant contre toute fonction test puis en appliquant Green

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3}$$

Contents

Un théorème déjà connu

Théorème de représentation de Riesz

Soit ℓ une forme linéaire continue de $H \to \mathbb{R}$, alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \ , \ \ell(v) = \langle u, v \rangle, \text{ de plus : } \|u\|_H = \|\ell\|_{H'}$$

Ce théorème est vu en EVNCD. Il assure l'existence et l'unicité d'une solution faible dans certains cas.
Il aura le désavantage de ne pouvoir être appliqué que dans les cas symétriques (produit scalaire).

Et son petit frère plus costaud

Théorème de représentation de Lax-Milgram

Soit a une forme bilinéaire continue de $H^2 \to \mathbb{R}$ coercive, et ℓ forme linéaire continue alors :
Il existe un unique $u \in H$tel que $\forall v \in H$, $\ell(v) = a(u, v)$ et $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_{\mathcal{L}(H',\mathbb{R})}$

Ce théorème assure l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas non symétrique.

Éléments de démonstration

Soit $\ell \in H'$ où H' est le dual de H.
Par Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\ell(v) = \langle f, v \rangle$.
Soit $u \in H$: $a(u, \cdot) \in H'$ est continue par hypothèse.
Par Riesz, il existe un unique vecteur $f_u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \langle f_u, v \rangle$.
On pose $A : u \in H \longmapsto f_u \in H$.
On montre que A est bijective grâce à la continuité et la coercivité de a ainsi que la caractérisation des Hilberts :
Si F est un e.v.n fermé de H d'orthogonal réduit au neutre alors $F = H$.
Donc $\ell(v) = a(A^{-1}f, v)$. On utilise la continuité de A pour montrer celle de A^{-1} et en déduire le contrôle.

Contents

Problème de Laplace

On a (1) $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \text{ formulation faible}$$

On pose $\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v$ et $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.
ℓ et $a(\cdot,\cdot)$ sont continues dans H_0^1 et a est le produit scalaire associé à H_0^1.

$$\Rightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega), \langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle f, v \rangle_{\mathbf{L}^2}$$

Le théorème de représentation de Riesz assure alors l'existence et l'unicité d'une solution faible dans H_0^1, ainsi qu'un contrôle sur la norme de la solution.

Opérateur Laplacien

On peut ainsi définir :

$$\begin{array}{rccc} -\Delta^{-1}: & \mathbf{L}^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ & f & \mapsto & -\Delta^{-1} f \end{array} \quad \text{l'unique solution de (1)}$$

$(-\Delta^{-1})$ est une isométrie linéaire.

Preuve

Le caractère linéaire est direct.

Le caractère bijectif vient de Riesz.

Le caractère isométrique du contrôle de la norme dans Riesz.

Opérateur non symétrique

On s'intéresse au grand frère du Laplacien, l'opérateur :

$$\mathcal{L} : u \in H_0^1 \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq d} \partial_i (a_{i,j} \partial_j u).$$

On suppose cet opérateur elliptique (ou coercif) au sens où :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

Le problème étudié est alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Riesz ne suffira pas à résoudre ce problème.

Opérateur non symétrique

Sa formulation au sens faible s'écrit :

$$\exists u \in H_0^1, \forall v \in H_0^1, \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq d} (a_{i,j} \partial_j u) \cdot (\partial_i v) = \int_\Omega f \cdot v$$

On pose alors

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \text{ et } a(u,v) = \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq d} (a_{i,j} \partial_j u) \cdot (\partial_i v)$$

On montre que a est une forme bilinéaire continue coercive.
On montre de même L forme linéaire continue.
On peut alors appliquer Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'une solution !

Contents

I - Motivations

II - Espaces de Sobolev

1) Définition générale
2) Structure des Sobolev
3) Inégalité de Poincaré
4) Théorème de Rellich

Résolution d'équations aux dérivées partielles

1) Reformulation du problème
2) Théorèmes de représentation
3) Résolutions de problèmes linéaires
4) Problème non linéaire

Problème

Équation non linéaire

On prend $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. L'équation $-\Delta u = f(u)$ est dite non linéaire car f dépend de u.

Résolution d'EDP non linéaires

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

admet une solution.

La solution n'est pas forcément unique.

Solution

Point fixe de Schauder :

Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet au moins un point fixe.

Classe d'équivalence

Si u_1 et u_2 sont mesurables sur Ω et f continue, si $u_1 \sim u_2$ alors $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$.
On définit ainsi une classe d'équivalence.

Composition :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $|f(t)| \leq a$. Alors l'application $\tilde{f} : u \mapsto f \circ u$ envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et est continue.

Éléments de démonstration 1/2

On montre que les injections suivantes sont compactes avec Rellich.

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{injection} & & \tilde{f} & & (-\Delta)^{-1} & \\ H_0^1(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ v & \mapsto & v & \mapsto & f(v) & \mapsto & T(v) \end{array}$$

Alors $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$ est un opérateur compact qui vérifie

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla w dx = \int_\Omega f(v) w dx.$$

Éléments de démonstration 2/2

On montre ensuite

$$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2} \|T(v)\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré :

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2}$$

Donc
$C = \left\{ v \in H^1_0(\Omega) ; \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/2} \right\}$
vérifie $T(C) \subset C$.
T est un opérateur compact continu donc $T(C)$ est relactivement compact car C borné.
Par théorème de Schauder, le résultat.

Conclusion

On est venu, on a vu, on a résolu.